EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :
• la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
• la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.
Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

CORRECTION

EXERCICE 2 — 4 points

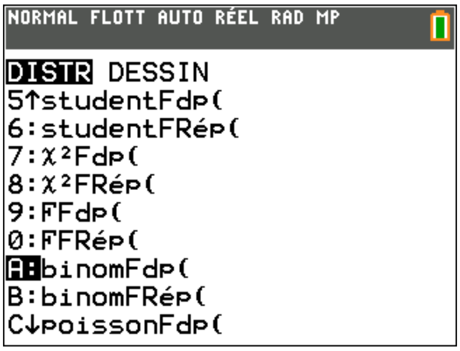
Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

On est en présence d'une expérience aléatoire à 2 issues possibles (la balle part à droite ou à gauche) qu'on répète 20 fois de suite de façon indépendante. Ceci constitue un schéma de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire qui dénombre les balles qui vont à droite.
X suit donc une loi normale de paramètre $n = 20$ et $p = \frac{1}{2}$.
La probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite est donc $p(X = 10)$.

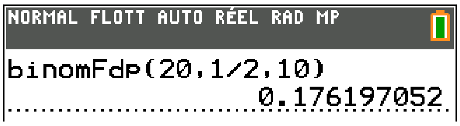
Pour calculer $p(X = 10)$ on utilise sa TI83 Premium CE :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **binomFdp(**



On complète la boite de dialogue :

D'où $\boxed{\boldsymbol{p(X = 10) \approx 0,176}}$ à 10^{-3} près.

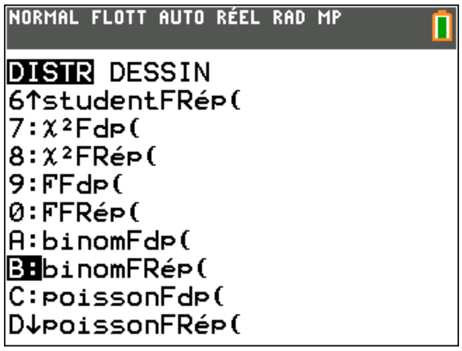


2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

On cherche $p(5 \leq X \leq 10) = p(X \leq 10) - p(X < 5) = p(X \leq 10) - p(X \leq 4)$

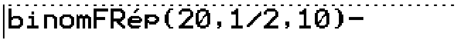
Pour calculer $p(X \leq 10) - p(X \leq 4)$ on utilise sa TI83 Premium CE :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **binomFRép(**



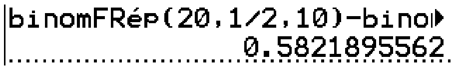
On complète la boite de dialogue :

On valide, puis on va soustraire $p(X \leq 4)$, on appuie à nouveau sur 2nde var (distrib) puis on choisit **binomFRép(**



On complète les champs

Et on obtient $\boxed{p(5 \leq X \leq 10) \approx 0,582}$ à 10^{-3} près.



Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

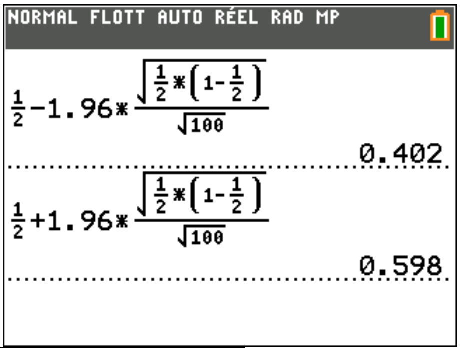
Soit X_{100} la variable aléatoire qui correspond au nombre de balles lancées à droite lors des 100 lancers.
X_{100} suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$.
D'après le cours, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $\frac{X_{100}}{100}$ est

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Or $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} - 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{100}} = 0{,}402$

et $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} + 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{100}} = 0{,}598$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $\frac{X_{100}}{100}$ est donc $[0{,}402; 0{,}598]$. Or $\frac{42}{100} \in [0{,}402; 0{,}598]$



Conclusion : **Le joueur ne doit pas douter du bon fonctionnement de sa machine.**

Partie C

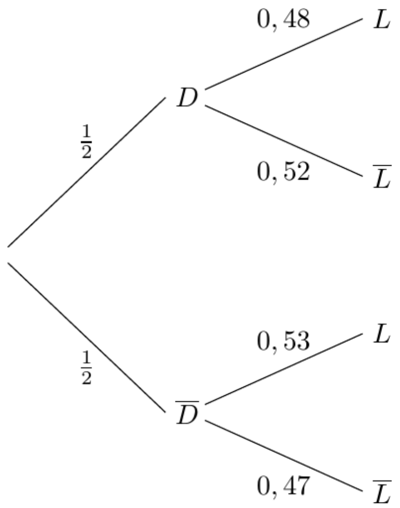
Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :
• la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
• la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.
Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Notons D l'événement : « la balle est envoyée à droite » et L : « la balle envoyée est liftée ».
$\bar{D}$ représente donc l'événement : « la balle est envoyée à gauche » et $\bar{L}$: « la balle envoyée est coupée ».

D'après l'énoncé $p(D) = p(\bar{D}) = \frac{1}{2}$, d'autre part $p(D \cap L) = 0{,}24$ et $p(\bar{D} \cap \bar{L}) = 0{,}235$

Or $p_D(L) = \frac{p(D \cap L)}{p(D)} = \frac{0{,}24}{0{,}5} = 0{,}48$ et $p_{\bar{D}}(\bar{L}) = \frac{p(\bar{D} \cap \bar{L})}{p(\bar{D})} = \frac{0{,}235}{0{,}5} = 0{,}47$. On obtient donc l'arbre suivant :

On déduit de l'arbre :
$p(\bar{L}) = 0{,}52 \times \frac{1}{2} + 0{,}47 \times \frac{1}{2} = 0{,}495.$



D'autre part on demande $p_{\bar{L}}(D)$

D'après le cours $p_{\bar{L}}(D) = \frac{p(\bar{L} \cap D)}{p(\bar{L})}$

Donc d'après l'arbre $p_{\bar{L}}(D) = \frac{0{,}52 \times \frac{1}{2}}{0{,}495} = \frac{52}{99}$
Soit $\boxed{\boldsymbol{p_{\bar{L}}(D) = 0{,}525}}$ à 10^{-3} près.