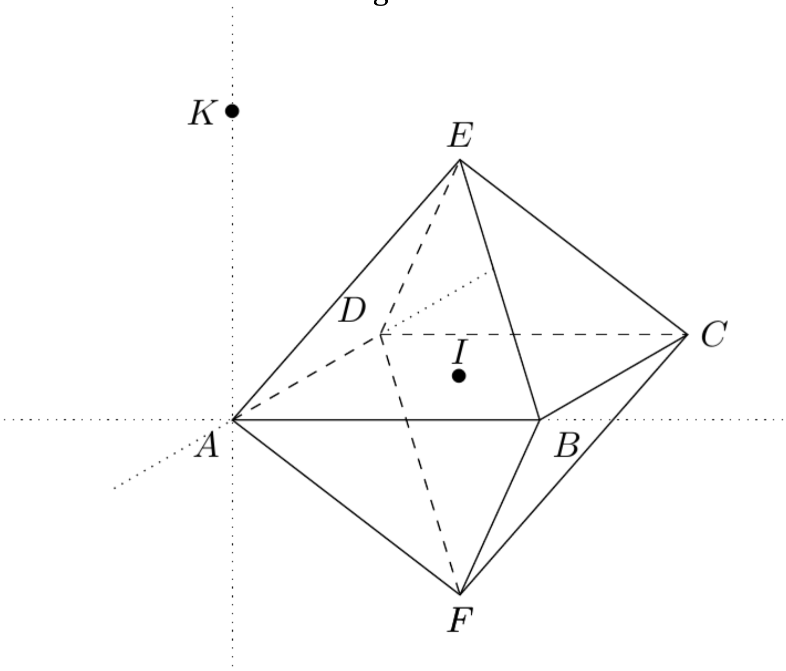
EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous (à rendre avec la copie). Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK}\right)$

1. a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points E et F.

   b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

   a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
   b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).
   c) Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).

CORRECTION

EXERCICE 1 **4 points**

1.a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points E et F.

1ère méthode :

$ABCDE$ est une pyramide régulière donc le projeté du sommet E sur sa base est le milieu du carré $ABCD$ soit le point I. Le triangle EIA est donc rectangle en I avec $I\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi $AI^2 = \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + (0-0)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

On en déduit d'après le théorème de Pythagore que $AI^2 + IE^2 = AE^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + IE^2 = 1$

$\Leftrightarrow IE^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $IE = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{IE = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

D'autre part (EI) est parallèle à l'axe (Oz) donc l'abscisse et l'ordonnée des points I, E et F sont identiques. On en déduit que $\boxed{E\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } F\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}$.

Pour ceux qui veulent une démonstration que EIA est rectangle en I :

Montrons tout d'abord que (EI) est perpendiculaire au plan (ABC) :

Le triangle ABE est équilatéral de coté 1 tout comme le triangle DCE, donc $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CD}$.
Or $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}\right) = 0$
Or I est le milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EI}$ ainsi $\overrightarrow{AB}.2\overrightarrow{EI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EI} = 0$. Ce qui prouve que $(EI) \perp (AB)$.
Par symétrie de la figure on a aussi $(EI) \perp (BC)$ donc (EI) est orthogonal à deux droites sécantes du plan (ABC) donc $(EI) \perp (ABC)$ ce qui prouve que le triangle EIA est rectangle en I.

2ème méthode : On utilise seulement l'hypothèse $AE = BE = DE = 1$

On pose $E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

ainsi les conditions $\begin{cases}AE = 1\\BE = 1\\DE = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2 = 1\\(x-1)^2+y^2+z^2 = 1\\x^2+(y-1)^2+z^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2 = 1\\x^2-2x+1+y^2+z^2 = 1\\x^2+y^2-2y+1+z^2 = 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ -2x+1=0 \\ -2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{E\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}$. I est le centre du carré de coté 1 donc $I\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$.

D'où $EI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(0+0+\frac{1}{2}\right)}$ donc $\boxed{EI=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

1. b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AK}\right)$ on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\times1+(-2)\times0+\sqrt{2}\times0=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AE}=0\times\frac{1}{2}+(-2)\times\frac{1}{2}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1+1=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}$

On a donc démontré que $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABE) ce qui prouve que

$\boxed{\textbf{le vecteur } \vec{n}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \textbf{ est normal au plan } (ABE).}$

---

1. c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

D'après la question 1.b. le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE). Ainsi le plan (ABE) admet une équation du type (ABE): $0\times x+(-2)\times y+\sqrt{2}\times z+d=0 \Leftrightarrow -2y+z\sqrt{2}+d=0$

Calculons d :

On sait que $A\in(ABE)\Leftrightarrow -2y_A+z_A\sqrt{2}+d=0\Leftrightarrow -2\times0+0\times\sqrt{2}+d=0\Leftrightarrow d=0$.

Conclusion : $(ABE):-2y+\sqrt{2}z=0$ soit en divisant par $\sqrt{2}$: $\boxed{(ABE):-\sqrt{2}y+z=0}$

---

2. a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

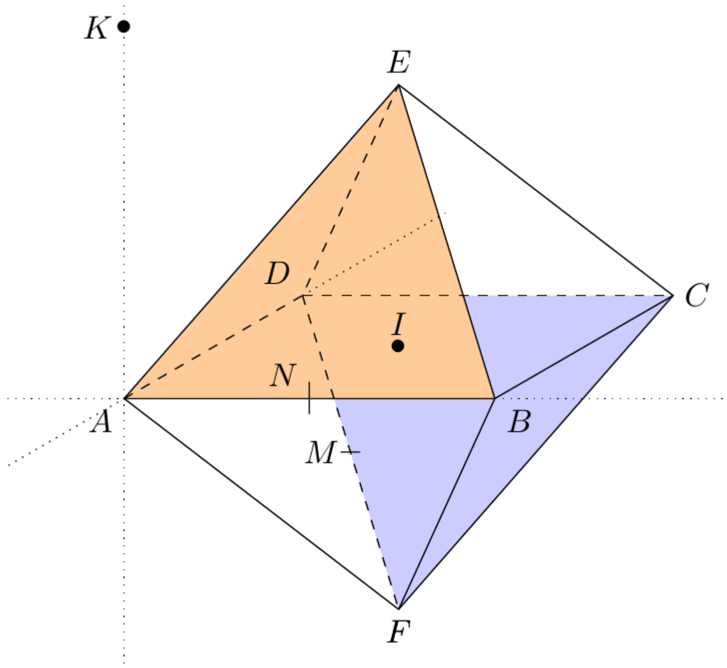
On sait que $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC).

D'autre part d'après 1.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE). Montrons que $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (FDC) :

$$\vec{n}.\overrightarrow{FC} = 0\times\frac{1}{2} + (-2)\times\frac{1}{2} + \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0\times 1 + (-2)\times 0 + \sqrt{2}\times 0 = 0$$

Donc deux vecteurs non colinéaires de (FDC) sont orthogonaux à $\vec{n}$ qui est aussi un vecteur normal au plan (FDC). Ce qui prouve que $\boxed{(ABE)//(FDC)}$.

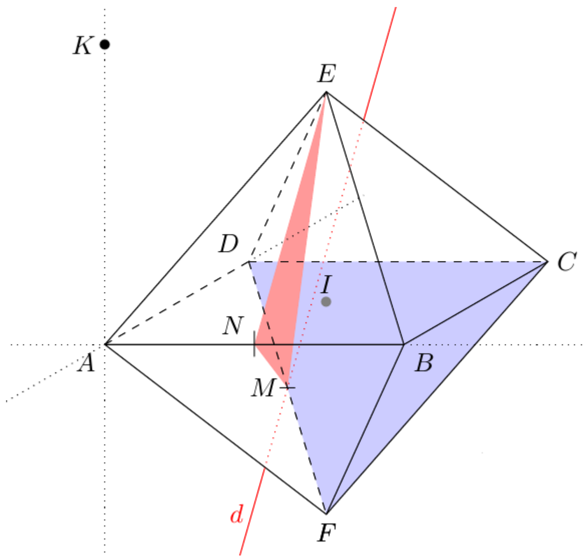


2. b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

Les plans (ABE) et (EMN) sont sécants en une droite (EN). Or $(ABE)//(FDC)$ donc d'après le cours, (FDC) et (EMN) sont sécants en une d droite parallèle à (EN).

Or $M \in (DF)$ et $M \in (EMN)$ donc $M \in (FDC) \cap (EMN)$ ce qui prouve que $M \in d$

Conclusion : $\boxed{\textbf{(FDC) ∩ (EMN) est la parallèle à (EN) passant par M.}}$



2. c) Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).

d est une droite du plan (FDC), les droites d et (DC) sont donc sécantes en P.
Dans le plan (ABC) les droites (AD) et (NP) sont sécantes en Q.
$Q \in (EMN) \cap (ADF)$ et $M \in (EMN) \cap (ADF)$ donc $(EMN) \cap (ADF) = (QM)$. On a noté R le point d'intersection de (AF) et (QM).