EXERCICE 2 : **3 points**
Commun à tous les candidats

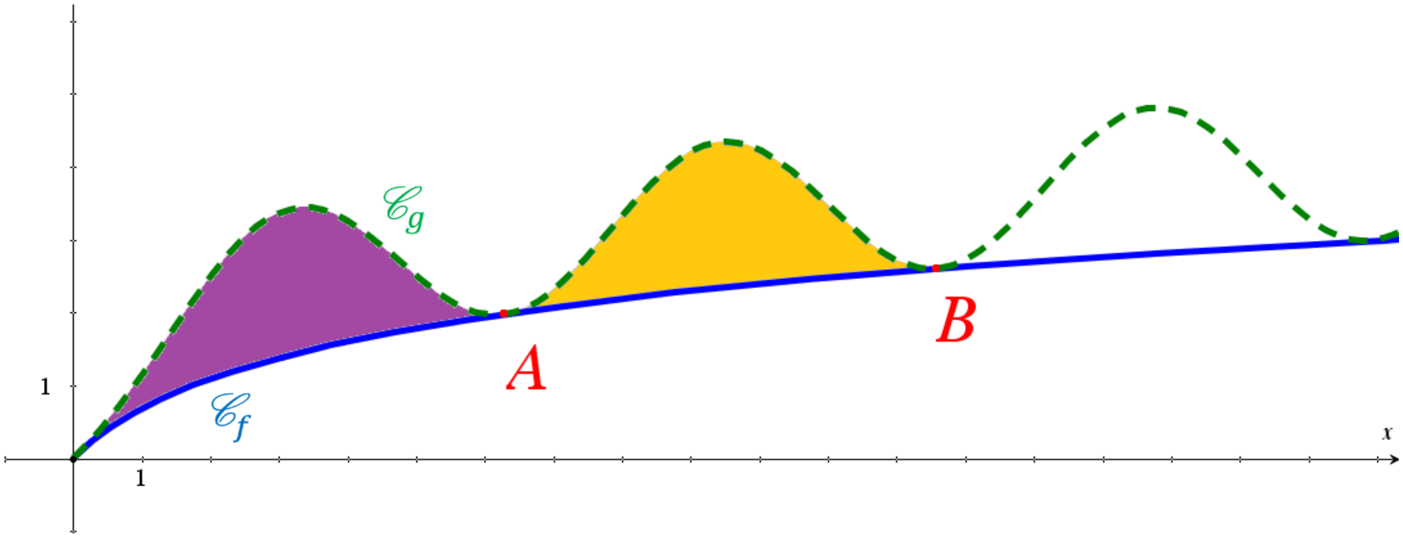
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données en **annexe 1**.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

ANNEXE 1



CORRECTION

EXERCICE 2 : 3 points
Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).}$$

Dans un repère du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en annexe 1.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

On remarque tout d'abord que $\forall x \in [0;16]\ \cos(x) \leq 1$ ainsi $1 - \cos(x) \geq 0$ donc
$\forall x \in [0;16]\ \ln(x+1) \geq \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$.

C_f est en dessous de C_g comme on pouvait le conjecturer sur le graphique.

Pour déterminer les aires, il faut tout d'abord calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g :

$$M(x,y) \in C_f \cap C_g \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x \in [0;16] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln(x+1) \\ y = \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \\ x \in [0;16] \end{cases}$$

Résolvons donc l'équation $\ln(x+1) + 1 - \cos(x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or $0 \leq x \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{8}{\pi}$.

```
8/π
                    2.546479089
```

Or on a $\frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$ et $k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$.

Si $k = 0$ alors $x = 2\pi \times 0 = 0$ et $f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$.
Si $k = 1$ alors $x = 2\pi \times 1 = 2\pi$ et $f(2\pi) = \ln(2\pi + 1) \approx 1{,}99$.
Si $k = 2$ alors $x = 2\pi \times 2 = 4\pi$ et $f(4\pi) = \ln(4\pi + 1) \approx 2{,}61$.

```
ln(2π+1)
                    1.985568309
ln(4π+1)
                    2.607593982
```

Conclusion : $C_f \cap C_g = \{O; A; B\}$, O est l'origine du repère, $A(2\pi; \ln(2\pi+1))$ et $B(4\pi; \ln(4\pi+1))$

La première aire est donc :

$$I = \int_0^{2\pi} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(x))dx = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = 2\pi - \sin(2\pi) - (0 - \sin(0)) = 2\pi \ \ u.a.$$

La seconde aire est :

$$J = \int_{2\pi}^{4\pi} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos(x))dx = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = 4\pi - \sin(4\pi) - (2\pi - \sin(2\pi))$$

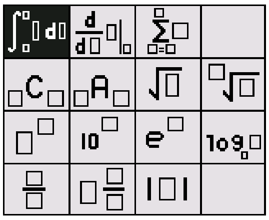
$$= 2\pi \ \ u.a.$$

Conclusion : **Les deux aires sont identiques** !

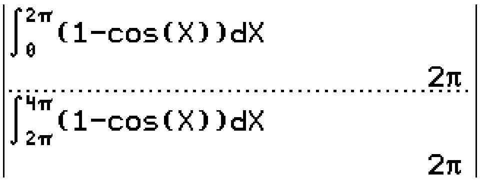
Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/d02I3j1n3Ss

Vérifions notre calcul avec notre TI83 Premium,

pour cela on appuie sur 



Puis on choisit le symbole intégral et on complète les champs.



Ce qui vérifie bien notre calcul ☺.