EXERCICE 3 : **6 points**
Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1;1;1)$ appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\begin{cases}x=12-2t\\ y=9-2t\\ z=t\end{cases}\text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
   b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
   c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10\leq m\leq 10 \text{ et } -10\leq m'\leq 10$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.
b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0$$

c. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :    m et m' entiers relatifs
Traitement :   Pour m allant de −10 à 10 :
                     Pour m' allant de −10 à 10 :
                           Si (mm')² + 16(m − 1)(m' − 1) + 4mm' =
0
                                 Alors Afficher (m; m')
                           FinSi
                     FinPour
               FinPour
```

Quel est le rôle de cet algorithme ?

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4;1)$, $(0;1)$et $(5;-4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

CORRECTION

EXERCICE 3 : 6 points
Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$P_m : \frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1;1;1)$ appartient-il au plan P_m ?

$$A(1;1;1)\in P_m \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2\times 1+(m-1)\times 1+\frac{1}{2}m\times 1-3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2+m-1+\frac{1}{2}m-3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \Leftrightarrow m^2+6m-16=0$$

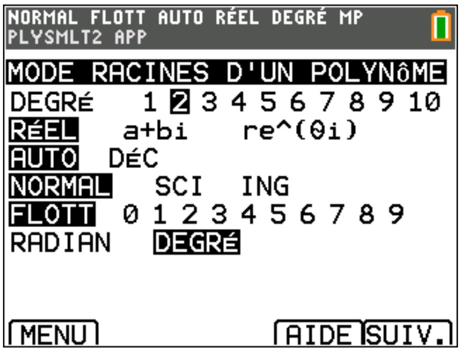
Calculons le discriminant : $\Delta=6^2-4\times 1\times(-16)=36+64=100$ donc $\Delta>0$ il y a donc 2 solutions : $m=\frac{-6-10}{2}=-8$ ou $m=\frac{-6+10}{2}=2$.

Vérifions nos calculs à l'aide de notre TI83 Premium :

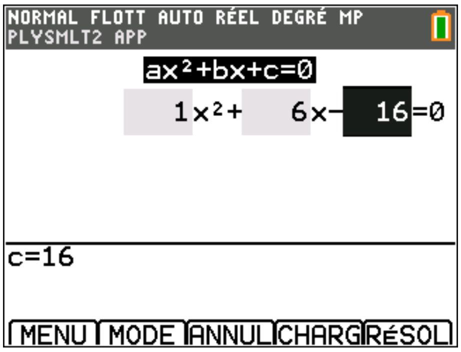
Pour résoudre une équation du second degré on utilise une application en appuyant sur 2nde puis apps résol.

On choisit alors 7:PlySmlt2.

Dans le menu qu'on nous propose, choisissons
1:RACINES D'UN POLYNôME
On précise le degré du polynôme, ici 2.

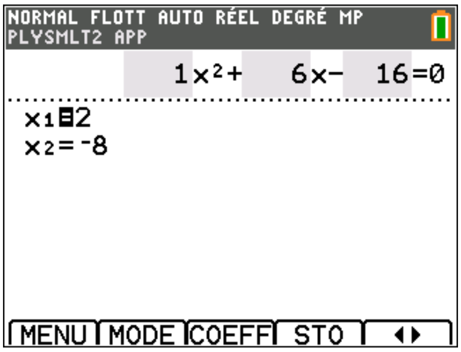


On entre les coefficients :



Puis on appuie sur RéSOL

On retrouve bien les solutions précédentes : -8 et 2.



Conclusion : $\boldsymbol{A(1;1;1) \in P_m \Leftrightarrow m = -8}$ **ou** $\boldsymbol{m = 2}$.

---

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminons tout d'abord les équations de P_1 et P_{-4} :

On a $P_1 : \frac{1}{4} \times 1^2 \times x + (1-1)y + \frac{1}{2} \times 1 \times z - 3 = 0$ d'où $P_1 : \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0$

On a $P_{-4} : \frac{1}{4} \times (-4)^2 \times x + (-4-1)y + \frac{1}{2} \times (-4) \times z - 3 = 0$ d'où $P_{-4} : 4x - 5y - 2z - 3 = 0$

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in P_1 \cap P_{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0 \\ 4x - 5y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z - 12 = 0 \\ 4x - 5y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2t - 12 = 0 \\ 4x - 5y - 2t - 3 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

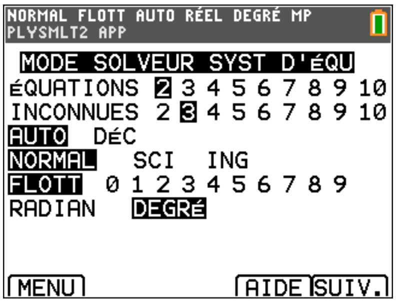
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 12 \\ 4(-2t+12) - 5y - 2t - 3 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 12 \\ -5y = 10t - 45 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 12 \\ y = -2t + 9 \\ z = t \end{cases}$$

Conclusion : les plans P_1 et P_{-4} sont sécants en une droite $\boldsymbol{(d)\begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}}$ **avec $\boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$**.

Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/lcq2Q8ujI4o

Vérifions nos calculs à l'aide de notre TI83 Premium :
Pour résoudre un système d'équations du second degré on utilise une application en appuyant sur 2nde puis apps résol.
On choisit alors 7:PlySmlt2.

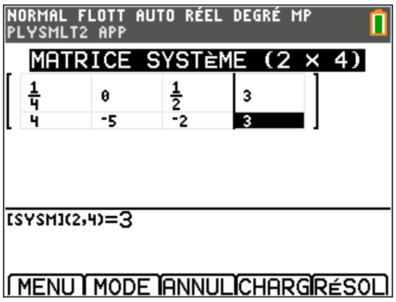
Dans le menu qu'on nous propose, choisissons 2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS



On précise le nombre d'équations : 2
et le nombre d'inconnues : 3.

On entre les coefficients :
Attention, les constantes doivent se situer à droite du symbole égal. Il faut transformer légèrement le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z = 3 \\ 4x - 5y - 2z = 3 \end{cases}$$



Puis on appuie sur RÉSOL

On retrouve bien les solutions précédentes :

$$(d) : \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(que le paramètre soit noté t ou x_3 ne change rien)

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

Déterminons tout d'abord une équation de P_0 :

On a $P_0 : \frac{1}{4} \times 0^2 \times x + (0-1)y + \frac{1}{2} \times 0 \times z - 3 = 0$ d'où $P_0 :\ -y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in P_0 \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 12 - 2t \\ -3 = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 12 - 12 \\ t = 6 \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \\ t = 6 \\ z = 6 \end{cases}$$

Conclusion : $\boldsymbol{P_0 \cap (d) = \{B\}}$ **avec** $\boldsymbol{B \left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{matrix}\right.}$.

---

3. b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

On a $P_m : \frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0$

Calculons donc : : $\frac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \frac{1}{2}mz_B - 3 = \frac{1}{4}m^2 \times 0 + (m-1) \times (-3) + \frac{1}{2}m \times 6 - 3$
$= -3m + 3 + 3m - 3 = 0$

Ce qui prouve que $\boldsymbol{\forall m \in \mathbb{R}, B \in P_m}$.

---

3. c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

Cherchons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall m \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0$$

Ainsi le polynôme de la variable m définie par $f(m) = \frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3$ est le polynôme nul.

On remarque que $f(m) = \frac{1}{4}m^2x + my - y + \frac{1}{2}mz - 3 = \frac{1}{4}x \times m^2 + \left(y + \frac{1}{2}z\right)m - y - 3$
f est le polynôme nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, soit :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \\ -y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3 + \frac{1}{2}z = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$ ce qui correspond aux coordonnées du point B.

Conclusion : **B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.**

---

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que $-10 \leq m \leq 10$ et $-10 \leq m' \leq 10$
On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.
a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

On a $P_1 : \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0$ et $P_{-4} : 4x - 5y - 2z - 3 = 0$

$\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal du plan P_1 et $\vec{n}_{-4}\begin{vmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal du plan P_{-4}

Calculons : $\vec{n}_1.\vec{n}_{-4} = \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{2} \times (-5) + (-3) \times (-2) = 1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 0$.

Donc **$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_{-4}$ ce qui prouve que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.**

4.b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0$$

P_m : $\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0$ donc $\vec{n}_m\begin{vmatrix} \frac{1}{4}m^2 \\ m-1 \\ \frac{1}{2}m \end{vmatrix}$ est un vecteur normal de P_m et de la même façon, $\vec{n}_{m'}\begin{vmatrix} \frac{1}{4}m'^2 \\ m'-1 \\ \frac{1}{2}m' \end{vmatrix}$ est un vecteur normal de $P_{m'}$

$$P_m \perp P_{m'} \Leftrightarrow \vec{n}_m \perp \vec{n}_{m'} \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 \times \frac{1}{4}m'^2 + (m-1) \times (m'-1) + \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}(mm')^2 + (m-1) \times (m'-1) + \frac{1}{4}mm' = 0$$

4.c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m *et* m' *entiers relatifs*
Traitement :	*Pour* m *allant de* -10 *à 10 :*
	Pour m' *allant de* -10 *à 10 :*
	Si $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $(m; m')$
	FinSi
	FinPour
	FinPour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme affiche tous les couples d'entiers (m, m') avec $-10 \leq m \leq 10$ et $-10 \leq m' \leq 10$ tels que $P_m \perp P_{m'}$.

---

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4; 1)$, $(0; 1)$ et $(5; -4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

En remarquant que si (m, m') est un couple qui convient alors (m', m) est aussi un couple qui convient.
D'après l'énoncé les couples $(-4,1)$; $(0,1)$ et $(5, -4)$ sont solutions donc les couples $(1, -4)$; $(1,0)$; $(-4,5)$ sont aussi solution.

Les 6 couples solution dans l'ordre d'affichage seront :

$$(-4,1)\ ;\ (-4,5)\ ;\ (0,1)\ ;\ (1,-4)\ ;\ (1,0)\ ;\ (5,-4)$$

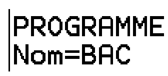
Vérifions nos résultats en exécutant le programme sur notre TI83 Premium :

Pour entrer le programme appuyons sur 

Puis on choisit l'onglet **NOUVEAU.**

On entre le nom de son programme : **BAC** (par exemple)

Puis on écrit son programme :



Notons qu'on a écrit **`Pause`** juste après l'affichage de M et N afin de pouvoir noter les valeurs affichées.

On sort de l'éditeur de programme en appuyant sur [2nde] [quitter / mode]

Puis on exécute le programme en appuyant sur [dessin C / prgm] puis on choisit le nom de son programme **`BAC`** :

On obtient les couples solution suivant :

$$(-4,1);(-4,5);(0,1);(1,-4);(1,0);(5,-4)$$