EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel , par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur.

	A	B	C
1	n	*u*	*v*
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?
2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

CORRECTION

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel , par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur.

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

On doit entrer dans la cellule C2 : =B2+2*A2^2+3*A2+5.
Et dans la cellule B3 : =2*B2+2*A2^2-A2.

---

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

On peut conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7 \times 2^n$ et donc $u_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$ soit $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$:

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie au rang 0 :
$7 \times 2^0 - 2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 5 = 7 - 5 = 2$, de plus $u_0 = 2$ la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire :
$u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 5$:

D'autre part $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ d'après l'énoncé
$= 2(7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5) + 2n^2 - n$ d'après l'hypothèse de récurrence.
$= 7 \times 2^{n+1} - 4n^2 - 6n - 10 + 2n^2 - n$
$= 7 \times 2^{n+1} - 2n^2 - 7n - 10$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} 7 \times 2^{n+1} - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 5 &= 7 \times 2^{n+1} - 2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 - 5 \\ &= 7 \times 2^{n+1} - 2n^2 - 4n - 2 - 3n - 8 \\ &= 7 \times 2^{n+1} - 2n^2 - 7n - 10 \end{aligned}$$

On a donc prouvé que la proposition est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : **pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$**.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5 + 2n^2 + 3n + 5$ soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{v_n = 7 \times 2^n}$.