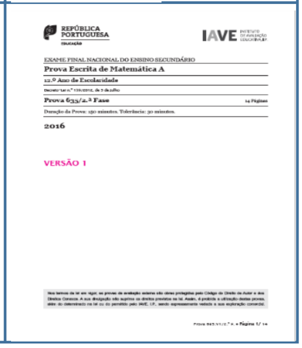
Matemática A

Exame 2016 2ª Fase V1

MATEMATICA A- 12º ANO

Extraído de:


REPÚBLICA PORTUGUESA
IAVE
EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/2.ª Fase
2016
VERSÃO 1

Introdução ao cálculo diferencial II

Funções logarítmicas / Cálculo diferencial

Grupo II

(...)

4. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x\leq 0\\ x-\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

(...)

4.3. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B

Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Proposta de resolução

Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$, começamos por determinar a expressão da derivada da função para x>0:

$$f'(x) = (x - \ln x)' = (x)' - (\ln x)' = 1 - \frac{x'}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma y=-x+b.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - (0 - ln2) = \frac{1}{2} + ln2$, sabemos que o ponto P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + ln2\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular do valor de b:

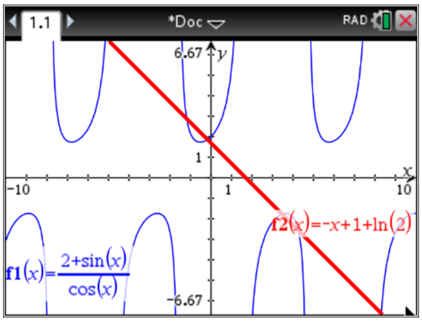
$$\frac{1}{2} + ln2 = -1\left(\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + ln2 + \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow 1 + ln2 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é: y=-x+1+ln2.

Como as abcissas dos pontos A e B pertencem ao intervalo $]\frac{-\pi}{2},0[$, representando na calculadora gráfica o gráfico da função f e a reta tangente ao gráfico em $x=\frac{1}{2}$, numa janela coerente com o intervalo $]\frac{-\pi}{2},0[$, poderemos obter esses pontos.

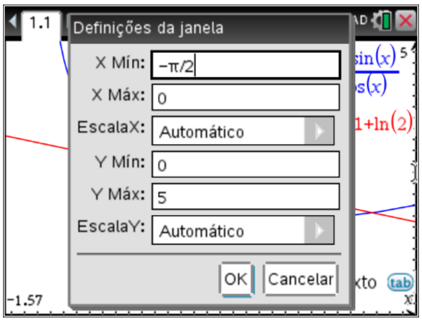
Para a resolução deste tópico utilizámos a unidade portátil TI-Nspire CX. No entanto o procedimento é semelhante para qualquer unidade portátil TI-Nspire (Clickpad, Touchpad ou CX).

No menu inicial do TI-Nspire, acessível através da tecla on, abre um novo documento (tecla 1) ou adiciona uma nova página com a aplicação Gráficos (segundo ícone).



Na linha de entrada, *f1(x)*= introduz $\frac{2+\sin x}{\cos x}$ e prime a tecla enter.

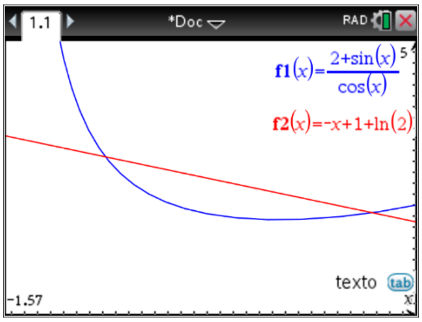
Clica de seguida na tecla tab e na linha de entrada *f2(x)*= introduz -x+1+ln(2), voltando a premir a tecla enter.



Uma vez que a janela de visualização não é a adequada para visualizar o ponto de interseção dos dois gráficos, vamos ter de ajustar a janela clicando em menu, **4:**Janela, **1:** Definições da janela.

Em **X Min** coloca $\frac{-\pi}{2}$, em **X Máx**:0, em **Y Min**:0 e em **Y Máx**:5, finalizando com enter.

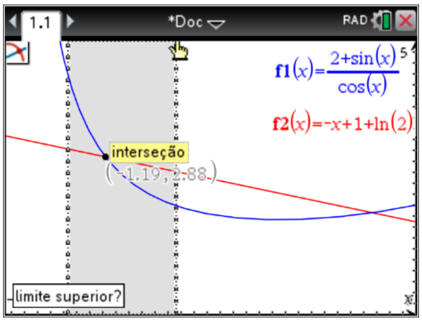
Na janela verás a interseção das duas curvas das quais se pretende determinar a interseção.



Para determinares o ponto de interseção tens de premir menu, **6:**Analisar gráfico, **4:**Interseção.

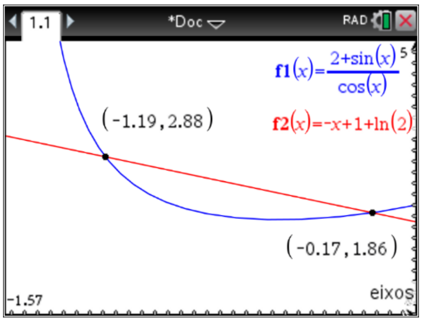
É solicitado o limite inferior (que fica à esquerda do ponto de interseção) que teremos de selecionar clicando em enter e posteriormente o limite superior (à direita do ponto de interseção) que selecionamos da mesma forma.

O procedimento deverá ser repetido para o segundo ponto de interseção.



As coordenadas dos pontos de interseção surgirão no ecrã, e as suas abcissas aproximadas (às centésimas) serão:

$x_{A\approx -1,19}\ e\ x_{B\approx -0.17}$



Deverás reproduzir o referencial, os gráficos e as coordenadas dos pontos de interseção na tua folha e apresentar a resposta:

As abcissas dos pontos **A** e **B** são respetivamente -1,19 e -0,17.