巧用 TI 图形计算器探究一道递推数列题

广州市第二中学 邓军民 (本文发表于华南师大《中学数学研究》2012 年第 5 期)

摘要：TI 图形计算器，是教学、学习和做数学研究的强有力的辅助工具．它为数学思想提供了可视化的图像，使组织和分析数据变得更加直观简单，更重要的是 TI 图形计算器具有便携性和灵活性，这为数学问题的研究以及数学教学提供了便利．利用 TI 图形计算器进行探究性学习，可以将数学问题化难为易、化繁为简，是非常有效的一种研讨数学问题的方式．

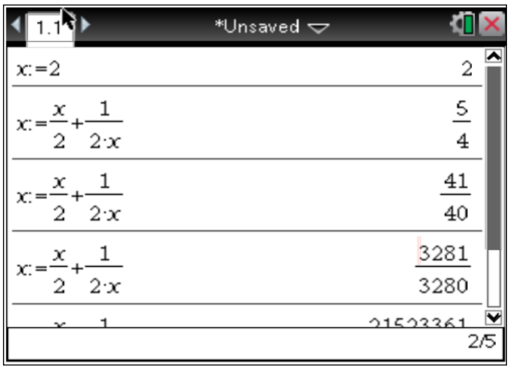
关键词：图形计算器；递推数列；探究性学习；创新意识

TI 图形计算器是美国德州生产的一种现代手持技术，它具有数据处理功能、函数功能、图形功能、简单编程功能和进行一些数理实验功能，是教学、学习和做数学研究的强有力的辅助工具．它为数学思想提供了可视化的图像，使组织和分析数据变得更加直观简单，更重要的是 TI 图形计算器具有便携性和灵活性，这为数学问题的研究以及数学教学提供了便利．前几天在一个数学 QQ 群讨论数学问题，一位老师提出这样一道递推数列题：

已知函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}$，在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$，求$\{a_n\}$的通项公式．

下面是笔者利用 TI-Nspire™ CX CAS 中文彩屏图形计算器探索并解决此题的过程：

首先由已知条件，易知$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{2a_n}$，用 TI 图形计算器的 CAS 功能做一下计算（如图 1），

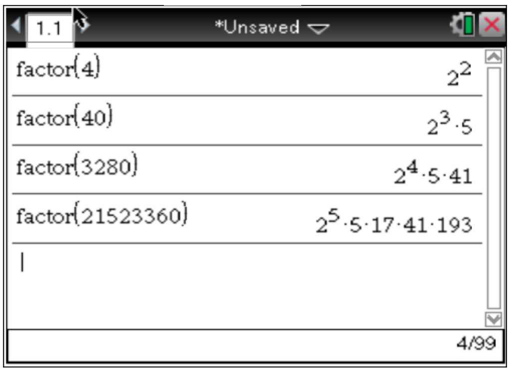


（图 1）

从 TI 图形计算器的计算结果可以看出，该数列的每一项有一个共同的特征就是：分子比分母大1，于是，我们只要研究其分母的规律即可，而分母依次为：

$1, 4, 40, 3280, 21523360, \cdots$

我们再利用 TI 图形计算器对上述新数列的前几项进行因子分解，观察所得到的结果（如图 2），不难发现，在后面的每一项的分解式子中，都可以找到前一项的所有因子，所以我们不难发现如下规律：



（图 2）

$b_1=1$

$b_2=b_1(3^1+1)=4$

$b_3=b_2(3^{2^1}+1)=40$

$b_4=b_3(3^{2^2}+1)=3280$

……

$b_n=b_{n-1}(3^{2^{n-2}}+1)$，将以上 n 个式子相乘得：

$$b_n = 1\cdot(3^1+1)\cdot(3^{2^1}+1)\cdot(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^{n-2}}+1)$$

$$=\frac{(3^1-1)(3^1+1)\cdot(3^{2^1}+1)\cdot(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^{n-2}}+1)}{3^1-1}=\frac{1}{2}\left[\left(3^{2^{n-2}}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[3^{2^{n-1}}-1\right],$$

所以 $a_n=\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{\frac{1}{2}\left[3^{2^{n-1}}-1\right]+1}{\frac{1}{2}\left[3^{2^{n-1}}-1\right]}=\dfrac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}$.

这是利用 TI 图形计算器探究这个递推数列而得到的结论，下面可以用数学归纳法证明之，考虑到利用递推关系 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{2a_n}$ 证明这个命题的过程很简单，笔者在此对数学归纳法的证明过程就不再赘述.

后面笔者通过反思上述解题思路，仔细观察递推式的特征，发现其分子分母和完全平方公式相关，于是得到下面的解法：

因为 $a_{n+1}=\dfrac{(a_n+1)^2+(a_n-1)^2}{(a_n+1)^2-(a_n-1)^2}=\dfrac{a_n{}^2+1}{2a_n}$，所以

$a_{n+1}+1=\dfrac{(a_n+1)^2}{2a_n}$　　①

$a_{n+1}-1=\dfrac{(a_n-1)^2}{2a_n}$　　②

两式相除得 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=(\dfrac{a_n+1}{a_n-1})^2$，从而 $\lg\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=2\lg\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$，

所以数列 $\left\{\lg\dfrac{a_n+1}{a_n-1}\right\}$ 是首项为 $\lg 3$，公比为 2 的等比数列，

所以 $\lg\dfrac{a_n+1}{a_n-1}=(\lg 3)\cdot 2^{n-1}=\lg 3^{2^{n-1}}$，从而 $\dfrac{a_n+1}{a_n-1}=3^{2^{n-1}}$，解得 $a_n=\dfrac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}$.

从笔者个人的角度来讲，如果没有得到解法一我是很难想到解法二的，在得到解法一的喜悦之余，回头反思整个利用 TI 图形计算器探究该题的过程的每一个细节，才得到解法二的．所以利用 TI 图形计算器进行探究性学习，可以将数学问题化难为易、化繁为简，是非常有效的一种研讨数学问题的方式．这个过程包括：观察和分析给定的数学事实，提出有价值的数学问题，猜测、探究具有规律性的数学结论，给出严谨的数学解释或证明．这是新课标下高中数学课程中引入的一种新的学习方式，这种学习方式有利于学习者建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神；有利于培养学习者勇于质疑、勇于探究和善于反思的习惯，培养学习者发现、提出、解决数学问题的能力；有利于发展学习者的创新意识和实践能力.