

经许可复制

著作权人姓名：施洪亮

错位排列问题的机器探索

华东师大二附中 施洪亮

在排列组合的学习与教学中，常见这样一类问题：同寝室的三位同学各写了一张贺年卡，把它们集中放在一起。每位同学从中选取一张，要求自己不拿自己写的卡，问一共有多少种不同的结果？

解决这道问题是容易的。设三位同学为甲、乙、丙，他们所写的贺卡依次记为 a、b、c。因为甲不能拿卡 a，所以甲只能拿卡 b 或 c。当甲拿卡 b 时，乙只能拿卡 c，（否则丙就只能拿他自己写的卡，这不满足要求）；当甲拿卡 c 时，丙只能拿卡 b，（否则乙就只能拿他自己写的卡，这也不满足要求）。因此符合要求的拿卡方案为：甲拿 b，乙拿 c，丙拿 a 与甲拿 c，乙拿 a，丙拿 b 共两种。

把这道问题做一下推广，并做一个抽象的概括，就是著名的错位排列问题（亦称更列问题）：1, 2, 3, …, n 的一个排列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，如果 $a_i \neq i$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$)，则称这种排列为一个错位排列，求错位排列的个数 D_n 。

错位问题的数学解决，可以用容斥原理来做，也可以直接构造递推式来求数列通项。但这些可能已超出高中学生的数学知识范畴，或不易接受。我们发现，这个问题的实质是计数-在判断前提下的计数。这一特点使我们极易联想起计算机的机械化操作，如果能够设计一个简易程序进行机器验证与计数的话，我们就可以解决这一难题。这时，我的学生手上拥有能够编写简易程序的 TI-92 图形计算器。下面，我们一起在 TI 技术的帮助下来探索错位排列的机器解决。

高中学生都学习过计算机编程，TI-92 图形计算器的程序设计非常简便。只需按 APPS 键，选中 Program Editor 选项，进入 New 菜单（图 1），即可编写程序。

具体程序的设计思路是：对 n 个元素的错位排列，建立 n 元数组，通过搜索，找到符合错位排列要求的新数组，加以记录。当搜索完所有数组后，得到的

记录数即为所求的 D_n 。(具体程序见附录)



图 1



图 2

通过计算，我们得到 $D_1=0, D_2=1, D_3=2, D_4=9, D_5=44, D_6=165, \dots$

通过程序，我们解决了错位排列的数值答案。但这并不能使学生感到满足。首先，这个搜索程序运算太慢，计算 D_5 就需要近半个小时。其次，仅仅有数值结果，并没有揭示错位排列在数学上的知识内涵。于是，我们利用前面的数值结果进行进一步的探索。

能否利用 $D_1=0, D_2=1, D_3=2, D_4=9, D_5=44, D_6=165, \dots$ 来归纳数列 $\{D_n\}$ 的通项公式或递推公式？借助 TI-92 图形计算器的数据编辑功能，我们来可以尝试一下。

按 APPS 键，选中 Data Editor 选项，进入 New 菜单，即可进行数据编辑（图 2）。

输入数据， C_1 表示数列的项数 n ， C_2 表示数列的项 D_n 。（图 3）

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot Setup	Cell Header	Calc	Util	Stat	
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	0				
2	2	1				
3	3	2				
4	4	9				
5	5	44				
6	6	265				
7	7	1854				

图 3

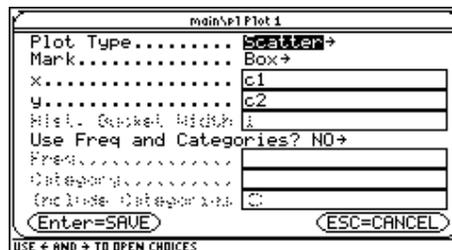
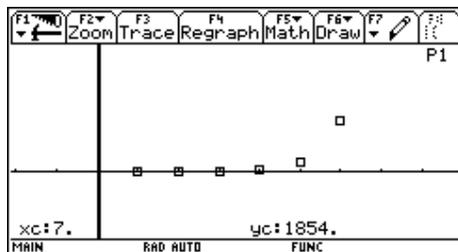


图 4

作散点图。（图 4、图 5）



图五

从图象上看，离散程度很大，直接归纳数列 $\{D_n\}$ 的通项公式难度太大。

我们不妨先研究数列 $\{D_n\}$ 中可能存在的递推关系。借助 TI-92 图形计算器的数据编辑功能，我们来探索 D_n 与 D_{n-1} 的关系。

输入数据， C_1 表示数列的项数 n ， C_2 表示数列的项 D_n ， C_3 表示数列项数从 2 开始依次的项 D_{n-1} （图六）。

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
2	2	1	0			
3	3	2	1			
4	4	9	2			
5	5	44	9			
6	6	265	44			
7	7	1854	265			
8	8	14833	1854			
r2c4=						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

图 6

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	0	undef	undef		
2	2	1	0			
3	3	2	1	3		
4	4	9	2	8		
5	5	44	9	45		
6	6	265	44	264		
7	7	1854	265	1855		
c4=c1*c3						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

图 7

由错位排列的定义知， D_n 与 D_{n-1} 的数量关系大致应为 n 倍乘关系，所以定义为 $C_4=n*C_3$ （图 7）。

考察 C_2 与 C_4 之间的数值关系，发现 C_2 与 C_4 的差在 1 与 -1 之间摆动。 n 为偶数时，差为 1； n 为奇数时，差为 -1（图八）。

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	0	undef	undef	undef	
2	2	1	0	1		
3	3	2	1	3	-1	
4	4	9	2	8	1	
5	5	44	9	45	-1	
6	6	265	44	264	1	
7	7	1854	265	1855	-1	
c5=c2-c4						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

图 8

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	0	undef	undef		
2	2	1	0	undef		
3	3	2	1	0		
4	4	9	2	1		
5	5	44	9	2		
6	6	265	44	9		
7	7	1854	265	44		
c5=						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

图 9

所以，我们得到如下递推公式 (1): $D_n = n * D_{n-1} + (-1)^n (n \geq 2)$ 。

我们不妨再退一步，考虑 D_n 与 D_{n-1} 、 D_{n-2} 的数量关系。输入数据， C_1 表示数列的项数 n ， C_2 表示数列的项 D_n ， C_3 表示数列项数从 2 开始依次的项 D_{n-1} ， C_4 表示数列项数从 3 开始依次的项 D_{n-2} (图 9)。

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c2	c3	c4	c5	c6		
1	0	undef	undef	undef	undef		
2	1	0	undef	undef	undef		
3	2	1	0	1			
4	9	2	1	3			
5	44	9	2	11			
6	265	44	9	53			
7	1854	265	44	309			
c5=c4+c3							
MAIN RAD AUTO FUNC							

图 10

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c2	c3	c4	c5	c6		
1	0	undef	undef	undef	undef		
2	1	0	undef	undef	undef		
3	2	1	0	1	2		
4	9	2	1	3	3		
5	44	9	2	11	4		
6	265	44	9	53	5		
7	1854	265	44	309	6		
c6=c2/c5							
MAIN RAD AUTO FUNC							

图 11

并定义为 $C_5 = C_4 + C_3$ (图 10)。

考察 C_2 与 C_5 之间的关系，发现 C_2 与 C_5 的比值与 C_1 数组的函数关系较明显。定义 $C_6 = C_2 / C_5$ (图 11)，发现 $C_1 - C_6 = 1$ 。所以，又可以得到错位排列的递推公式 (2):

$$D_n = (n-1) * (D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

由数列知识，我们易知公式 (1) 与公式 (2) 可以互推，并且由递推公式，我们可以求得数列 $\{D_n\}$ 的通项公式: $D_n = n! * [1 - 1/1! + 1/2! - \dots + (-1)^n 1/n!]$ 。

当然，利用前面的递推公式与通项公式，我们可以重新编写一个简单的程序来计算错位排列数，它的运算速度将远远快于本文开头的程序。这个工作请有兴趣的读者自己完成。

错位排列的机器探索至此告一段落。读者可能觉得，没有必要这样子来解决错位排列问题。确实，这是一条“迂回路线”！但笔者想表达的是一种利用技术与工具来解决数学问题的思路。当一个问题的解题思路可以机器化时，你是否想过把它编程，交给计算机去计算？机器计算在数学中的作用正受到越来越多的人的关注。“四色问题”等著名数学难题的解决，就是计算技术运用于数学的成功典范；我国著名数学家吴文俊在探索机器证明领域取得了举世瞩目的成就...

技术就在数学身边！数学与技术是不可分的！

附录一（错位排列的搜索程序）

```

**T192P*□□main□prom
p10()
Prgm
Request "enter n", n
expr(n) →□n
0□→total
newList(n) →□nnn
newList(n) →□nmm
For nna, 0, nn-1, 1
nna→□nnb
1□→flag
For i, 1, n, 1
0→□nmm[i]
EndFor
For nnc, n, 1, -1
floor(nnb/n(nnc-1)) →□nnd
nnd+1□→nnn[nnc]
If nnd+1=n-nnc+1 Then
0→□flag
EndIf
nmm[nnd+1]+1→□nmm[nnd+1]
n(nnc-1)*nnd□→nne
nnb-nne→□nnb
EndFor
If flag=1 Then
For i, 1, n, 1
If 0=nmm[i] Then
0□→flag

```

```

EndIf
EndFor
EndIf
If flag=1 Then
total+1→□total
EndIf
EndFor
Disp total
EndPrgm□□□

```

附录二（错位排列的通项计数程序）

```

**T192P*□□main□□
p12 ( )
Prgm
Request "enter n",n
expr (n) →□n
nPr (n,n) →□total
For i, 1, n, 1
(-1)^i*nCr (n, i)*nPr (n-i, n-i) □ →ai
total+ai□→total
EndFor
Disp total
EndPrgm□□

```