巧用 TI 图形计算器探索定值条件下的动点轨迹

摘　要：

本文利用 TI 图形计算器的几何功能，探索了平面内到两定点的距离、到定点与定直线的距离，和、差、积、商分别为定值条件时的动点轨迹；利用图形绘制功能，验证了探索结论；利用 CAS 计算功能，分析与研究了相关轨迹方程.

关键词：**动点轨迹　教育技术　图形计算器　定值条件**

动点的轨迹是解析几何中的热点问题，例如高中所接触的平面内动点到两定点的距离和为常数、距离差的绝对值为常数，到定点与定直线的距离比为常数等等. 下面将利用 TI 图形计算器这一先进的技术工具，研究以上定值条件下的动点轨迹问题并进一步拓展.

上篇　平面内到两定点距离之"和、差、积、商"定值型

在高中数学教材中，分别研究了平面内到两定点的距离之和为常数、距离之差的绝对值为常数的动点轨迹，其实，此类到两定点的距离关系恒定的研究，还可以拓展到距离之积为常数、距离之比为常数，借助 TI 图形计算器，此类研究都将轻松实现.

问题 1　平面内到两定点的**距离之和**为定值的动点轨迹是什么图形？

探索过程：按如下步骤操作.

S1　新建一个文档，选择添加几何页，并保存文件名为"定值条件下的轨迹"；

S2　作出三点 F_1、F_2、M 及两线段 MF_1、MF_2；

S3　测量线段 MF_1、MF_2 的长度；

S4　插入文本"$MF1+MF2$"；

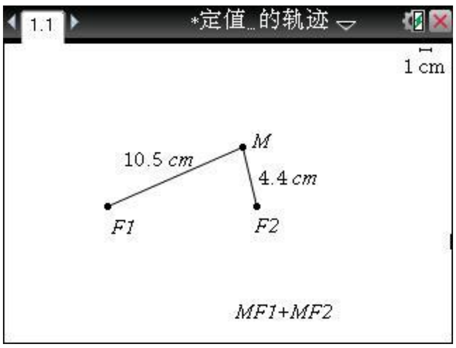
S5　计算文本"$MF1+MF2$"的值；

S6　修改文本计算结果的属性为"对象锁定"；

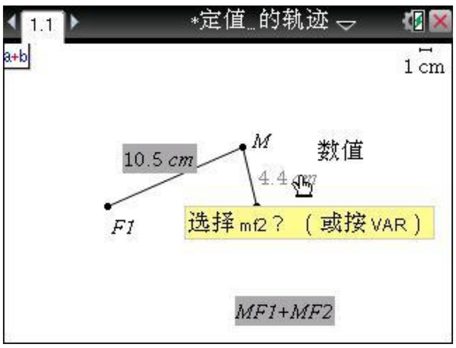
S7　跟踪点 M 的轨迹.

操作提示：按 开机 1 3 新建一个文档及几何页，按 ctrl 保存文档，按 切换中英文；按 菜单 7 1 作点，按 菜单 7 5 作线段，按 菜单 8 1 测量长度，注意配合 键使用，用 选择某点后，按 ctrl 菜单 2 可设置标签. 按 菜单 1 7 插入文本，按 菜单 1 8 计算文本值，根据提示用 选择相应对象. 用 选择文本结果后，按 ctrl 菜单 2 可设置属性，按▼▶ enter 锁定对象. 用 选择点 M 后，按 ctrl 菜单 9 几何跟踪，再用 移动点 M.

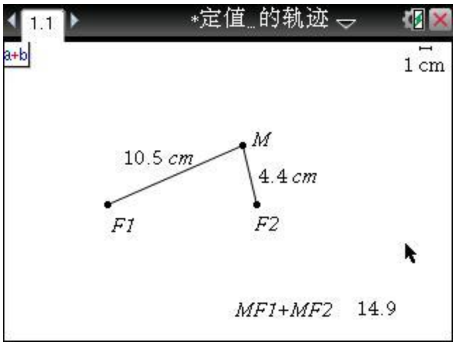
显示结果：操作过程及显示结果如下图.



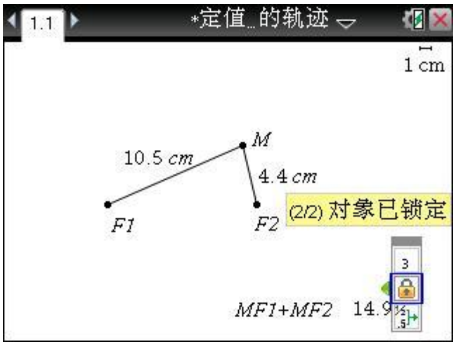
（S1~S4）



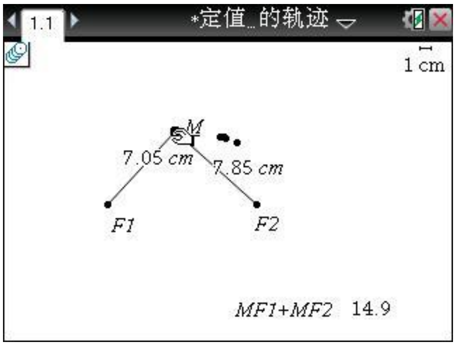
(S5)



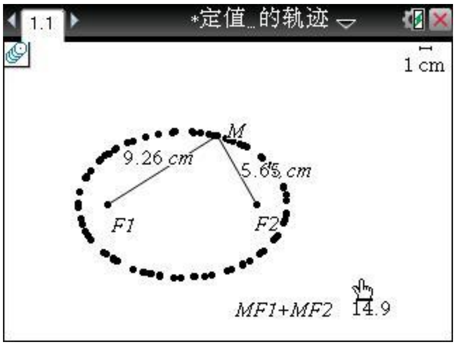
(S5)



(S6)



(S7)



技术小结：以上动点轨迹的探索过程中，应用到的 TI 技术依次包括“数据测量→文本计算→属性锁定→几何跟踪”，依此四步曲，可以研究系列定值条件下的动点轨迹.

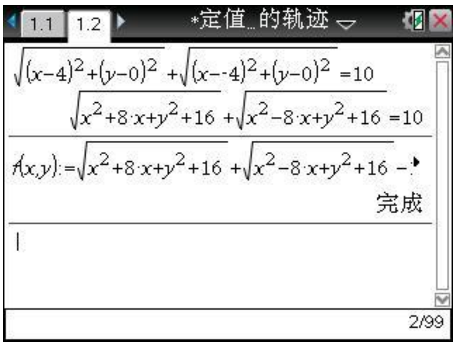
例 1 已知两点 $F_1(-4,0)$、$F_2(4,0)$，求平面内到定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 10 的动点 M 的轨迹方程.

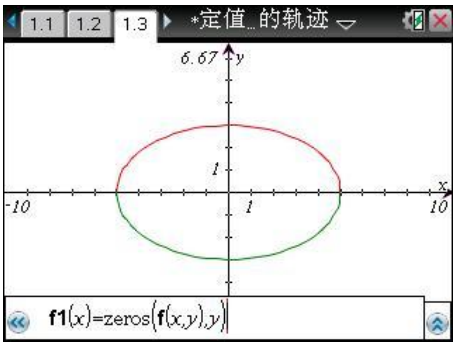
分析：设动点 M 的坐标，根据两点距离公式写出条件等式，再进行化简.

解：**第一步** 添加一个计算页，写出条件等式.

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-(-4))^2+(y-0)^2}=10.$$

第二步 定义函数 $f(x,y)$=左式－右式，添加一个图形页，作出其图像.





第三步 返回计算页，逐步化简出方程，步骤依次是：移项、平方、移项、再平方、移项、化常数 1.

$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x--4)^2+(y-0)^2}=1$▸	$\sqrt{x^2+8\cdot x+y^2+16}+\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}=1$▸
$f(x,y):=\sqrt{x^2+8\cdot x+y^2+16}+\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}-1$▸	完成
$\sqrt{x^2+8\cdot x+y^2+16}=10-\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}$	$\sqrt{x^2+8\cdot x+y^2+16}=10-\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}$
$\left(\sqrt{x^2+8\cdot x+y^2+16}=10-\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}\right)^2$	$x^2+8\cdot x+y^2+16=\left(\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}-10\right)^2$
$x^2+8\cdot x+y^2+16-\left(\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}-10\right)^2=0$	$20\cdot\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}+16\cdot x-100=($▸
$\left(20\cdot\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}+16\cdot x-100=0\right)-(16\cdot x-10($▸	$20\cdot\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}=100-16\cdot$▸
$\left(20\cdot\sqrt{x^2-8\cdot x+y^2+16}=100-16\cdot x\right)^2$▸	$400\cdot\left(x^2-8\cdot x+y^2+16\right)=16\cdot(4\cdot x-25)^2$▸
$400\cdot\left(x^2-8\cdot x+y^2+16\right)-16\cdot(4\cdot x-25)^2=($▸	$144\cdot x^2+400\cdot y^2-3600=0$
$\left(144\cdot x^2+400\cdot y^2-3600=0\right)+3600$	$144\cdot x^2+400\cdot y^2=3600$
$\dfrac{144\cdot x^2+400\cdot y^2=3600}{3600}$	$\dfrac{9\cdot x^2+25\cdot y^2}{225}=1$
$\text{expand}\left(\dfrac{9\cdot x^2+25\cdot y^2}{225}=1\right)$	$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$
	4/11

操作提示：按[ctrl][文档▾][1]添加一个计算页，按[ctrl][x²]调用根号，按[ctrl][定义符键]调用定义符，按[菜单][3][3]展开，按[(-)]得负号．按[ctrl][文档▾][2]添加一个图形页．

以上研究过程中，利用 TI 图形计算器几何跟踪的技术，得到了平面内到两定点距离之和为常数（常数大于两定点之间的距离）的动点轨迹是椭圆；利用 TI 图形计算器的图形功能，通过二元函数之零点表达式 $zeros(f(x,y),y)$ 绘制出符合条件的函数图像；再利用 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，通过系列的符号变换，化简求出了动点轨迹方程．概括以上，几何跟踪让我们走上了探索之路，图形绘制验证了我们探索的结果，CAS 计算展示了解决问题的数学方法与思维．

既然平面内到两定点的距离之和为常数的轨迹是椭圆，那么距离之差、积、商分别为常数的轨迹又分别是怎样的图形呢？接下来的研究过程与以上相同，我们可类似研究．

问题 2 平面内到两定点的**距离之差的绝对值**为定值的动点轨迹是什么图形？

探索过程：

S1 插入一个新问题，选择添加几何页；

S2 作出三点 F_1、F_2、M 及两线段 MF_1、MF_2，测量线段 MF_1、MF_2 的长度；

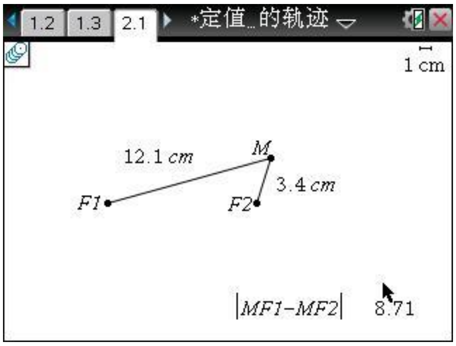
S3 插入文本“$|MF1-MF2|$”，计算文本“$|MF1-MF2|$”的值；

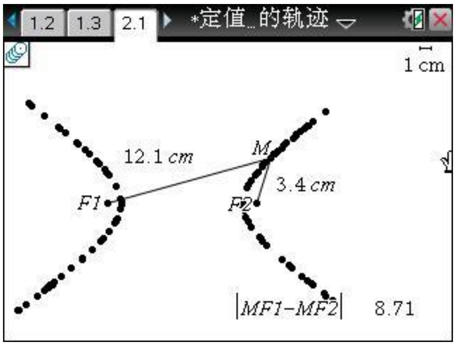
S4 修改文本计算结果的属性为“对象锁定”，

S5 跟踪点 M 的轨迹．

操作提示：按[文档▾][4][1][3]添加一个问题及几何页，按[模板键]可选择绝对值符．按[菜单][7][1]作点，按[菜单][7][5]作线段，按[菜单][8][1]测量长度，按[菜单][1][7]插入文本，按[菜单][1][8]计算文本值，按[ctrl][菜单][2]设置属性为锁定．按[菜单][5][4]几何跟踪，再用[抓取键]移动点 M．

显示结果：操作过程及显示结果如下图．





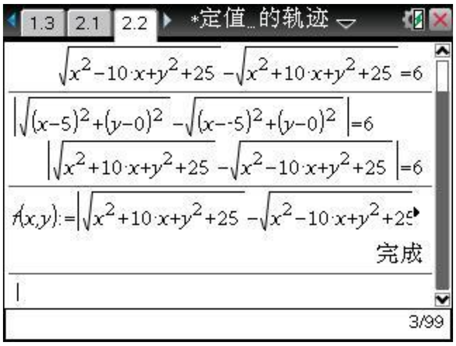
技术小结：探索定值条件下动点轨迹的四步曲：“数据测量→文本计算→属性锁定→几何跟踪”. S2～S5 的操作，我们可以采用复制页面的方法进行处理.

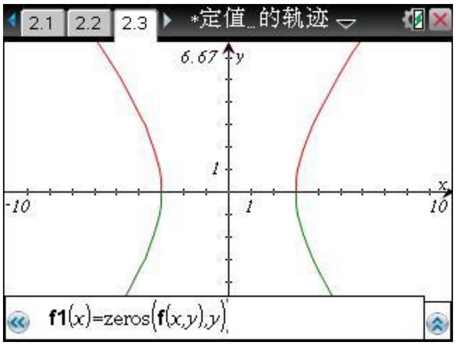
例 2 已知两点 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$，求平面内到定点 F_1、F_2 的距离之差的绝对值等于常数 6 的动点 M 的轨迹方程.

解：第一步 添加一个计算页，写出条件等式.

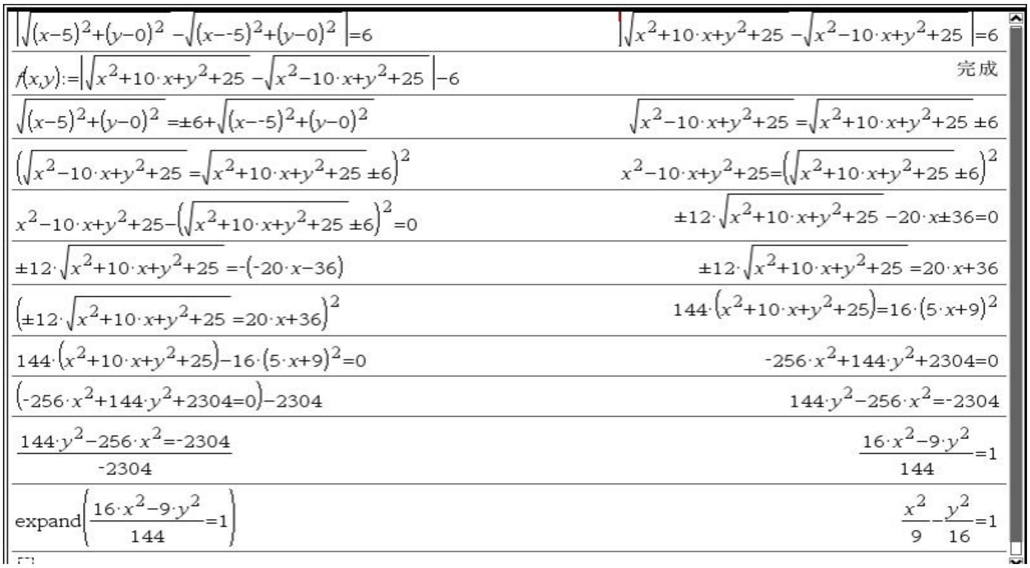
$$|\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-(-5))^2+(y-0)^2}|=6.$$

第二步 定义函数 $f(x,y)$ =左式－右式，添加一个图形页，作出其图像.



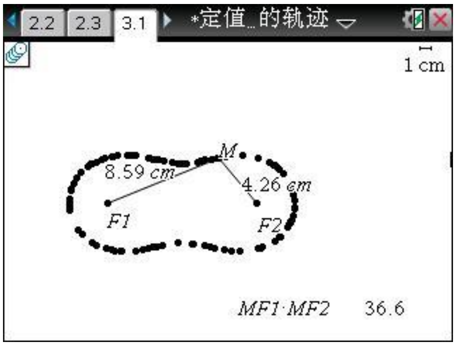


第三步 返回计算页，逐步化简求出方程.

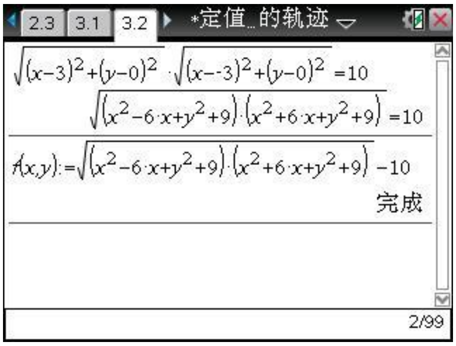


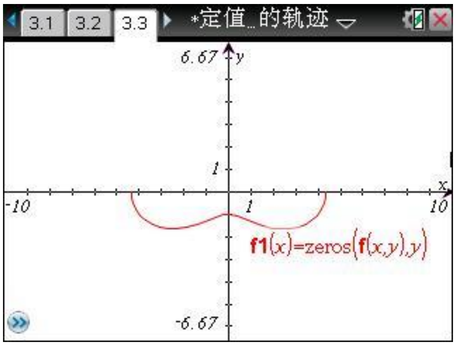
问题 3 平面内到两定点的**距离之积**为定值的动点轨迹是什么图形？

探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.



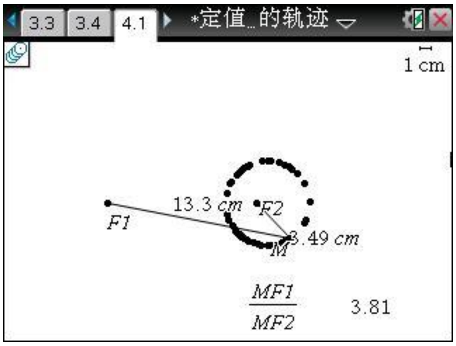
由几何跟踪的 TI 技术，我们得到了平面内到两定点距离之积为常数的动点轨迹可能是一个有趣的“花生”，仿照问题 1 与问题 2，我们也可以研究一个具体的例子（例 3 略，见下图），但非常遗憾的是，TI 图形计算器不能完整的绘制次数为 4 次的隐函数图形.





问题 4 平面内到两定点的**距离之比**为定值的动点轨迹是什么图形？

探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.



由几何跟踪的 TI 技术，我们得到了平面内到两定点距离之比为常数的轨迹是一个圆. 同样也可以研究一个具体的例子，通过 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，求解出其方程.

例 4 已知两点 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$，求平面内到定点 F_1、F_2 的距离之比等于常数 $\frac{1}{4}$ 的动点 M 的轨迹方程.

此题利用 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，具体演算过程如下.

$$\frac{\sqrt{(x--3)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}}=0.25 \qquad \frac{\sqrt{x^2+6\cdot x+y^2+9}}{\sqrt{x^2-6\cdot x+y^2+9}}=0.25$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+6\cdot x+y^2+9}}{\sqrt{x^2-6\cdot x+y^2+9}}=0.25\right)^2 \qquad \frac{x^2+6\cdot x+y^2+9}{x^2-6\cdot x+y^2+9}=0.0625$$

$$\left(\frac{x^2+6\cdot x+y^2+9}{x^2-6\cdot x+y^2+9}=0.0625\right)\cdot\left(x^2-6\cdot x+y^2+9\right) \qquad x^2+6\cdot x+y^2+9=0.0625\cdot\left(x^2-6\cdot x+y^2+9\right)$$

$$\left(x^2+6\cdot x+y^2+9=0.0625\cdot\left(x^2-6\cdot x+y^2+9\right)\right)\cdot 16 \qquad 16\cdot\left(x^2+6\cdot x+y^2+9\right)=x^2-6\cdot x+y^2+9$$

$$16\cdot\left(x^2+6\cdot x+y^2+9\right)-\left(x^2-6\cdot x+y^2+9\right)=0 \qquad 15\cdot x^2+102\cdot x+15\cdot\left(y^2+9\right)=0$$

$$\frac{15\cdot x^2+102\cdot x+15\cdot\left(y^2+9\right)=0}{15} \qquad \frac{5\cdot x^2+34\cdot x+5\cdot\left(y^2+9\right)}{5}=0$$

$$\text{completeSquare}\left(\frac{5\cdot x^2+34\cdot x+5\cdot\left(y^2+9\right)}{5}=0,x,y\right) \qquad \left(x+\frac{17}{5}\right)^2+y^2=\frac{64}{25}$$

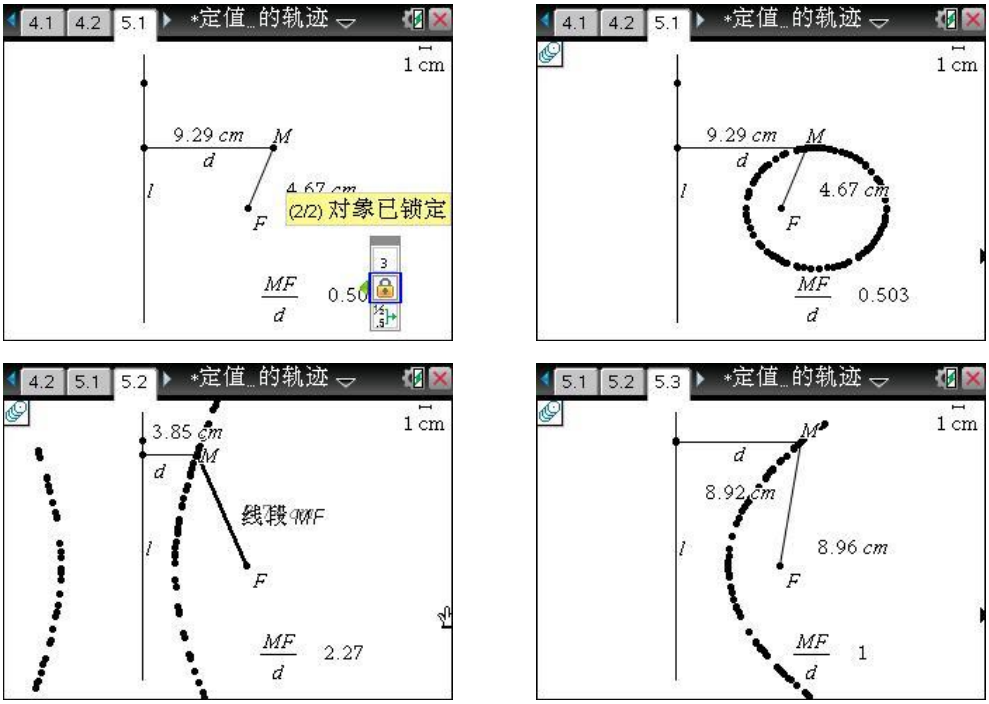
通过以上演算过程的演练，我们重温了求解轨迹方程的代数变形之路，数学思维方法再次得以熏陶.

下篇　平面内到定点与定直线距离之“和、差、积、商”定值型

在高中数学教材中，平面内到定点与定直线的距离关系问题，我们只研究了距离相等的轨迹为抛物线，即比值为 1 的情况. 参考上篇部分的研究，此类问题同样可拓展为平面内到定点与定直线的距离之比、距离之和、距离之差的绝对值、距离之积为常数，这些动点轨迹又将是怎样的有趣图形，下面我们一一研究.

问题 5　平面内到定点与定直线的**距离之比**为常数的动点轨迹是什么图形？

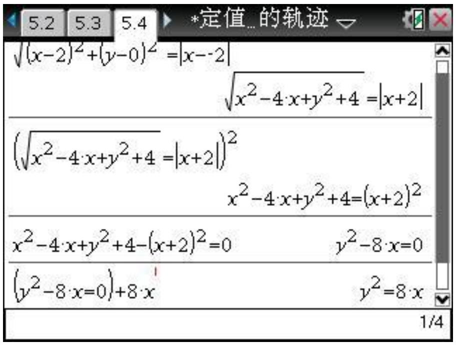
探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.



在进行以上几何跟踪时，我们注意调整动点 M 的位置，使距离之比分别为 0～1 之间、大于 1、等于 1 这三种情况. 可以看出，三种情况的动点轨迹分别是椭圆、双曲线、抛物线. 这样，将高中数学教材中抛物线的定义进行了拓展，得到了圆锥曲线的统一定义.

例 5 已知定点 $F(2,0)$ 和定直线 $l: x=-2$，求平面内到定点 F 和定直线 l 的距离相等的动点 M 的轨迹方程.

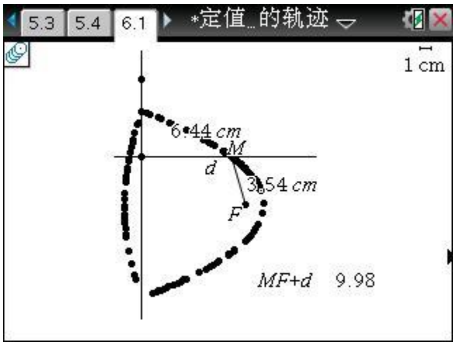
此题利用 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，具体演算过程如下.



我们只演算了抛物线方程的求解，椭圆、双曲线方程的求解也同样可得.

问题 6 平面内到定点与定直线的**距离之和**为常数的动点轨迹是什么图形？

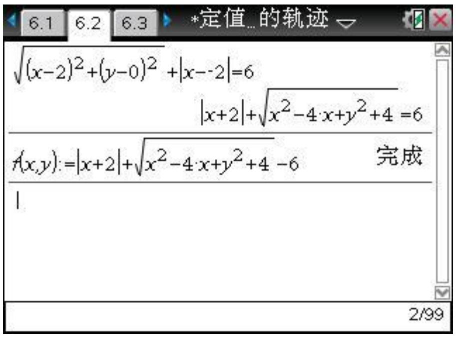
探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.

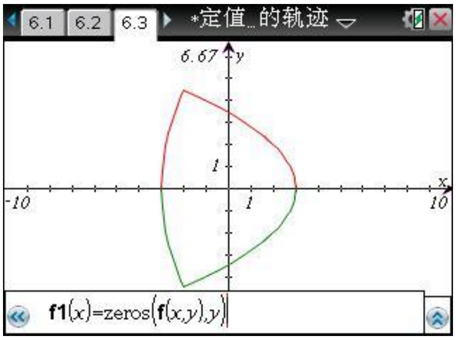


由几何跟踪的结果，我们发现平面内到定点与定直线的距离之和为常数的动点轨迹是常见的探照灯模型. 那么能通过具体的例子求解出方程，准确分析其轨迹图形吗？

例 6 已知定点 $F(2,0)$ 和定直线 $l: x=-2$，求平面内到定点 F 和定直线 l 的距离之和为常数 6 的动点 M 的轨迹方程.

设动点 M 的坐标，写出条件等式，定义二元函数，再用零点表达式作出图形，如下：





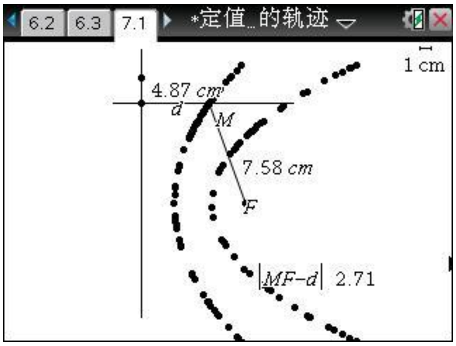
同样可利用 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，求出具体的轨迹方程，具体演算过程如下.

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\lvert x--2\rvert=6$	$\lvert x+2\rvert+\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}=6$
$f(x,y):=\lvert x+2\rvert+\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}-6$	完成
$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}\right)^2-(6-\lvert x--2\rvert)^2=0$	$12\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-36=0$
$12\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-36=0\mid x\geq -2$	$4\cdot x+y^2-12=0$
$(4\cdot x+y^2-12=0)+12-4\cdot x$	$y^2=12-4\cdot x$
$\text{factor}(y^2=12-4\cdot x)$	$y^2=-4\cdot(x-3)$
$12\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-36=0\mid x<-2$	$-20\cdot x+y^2-60=0$
$(-20\cdot x+y^2-60=0)+60+20\cdot x$	$y^2=20\cdot x+60$
$\text{factor}(y^2=20\cdot x+60)$	$y^2=20\cdot(x+3)$

由以上演算过程，我们也可以看出结果是两段抛物线.

问题 7　平面内到定点与定直线的**距离差的绝对值**为常数的动点轨迹是什么图形？

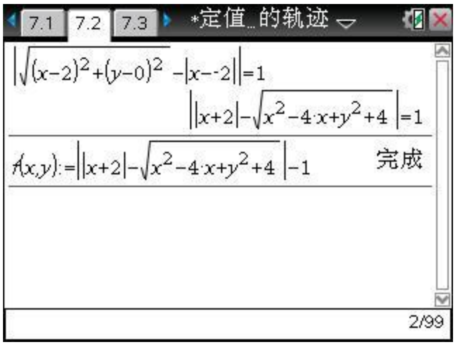
探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.

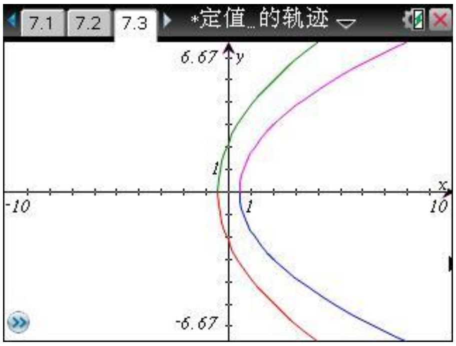


由几何跟踪的结果，我们发现平面内到定点与定直线的距离之差的绝对值为常数的动点轨迹是两条抛物线.

例 7　已知定点 $F(2,0)$ 和定直线 $l:x=-2$，求平面内到定点 F 和定直线 l 的距离之差的绝对值为常数 1 的动点 M 的轨迹方程.

设动点 M 的坐标，写出条件等式，定义二元函数，再用零点表达式作出图形，如下：





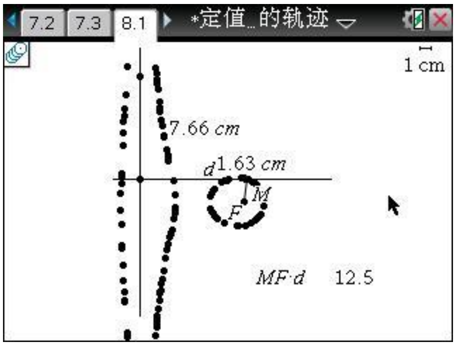
同样可利用 TI 图形计算器的 CAS 计算功能，求出具体的轨迹方程，具体演算过程如下.

$\left\lvert\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}-\lvert x--2\rvert\right\rvert=1$	$\left\lvert\lvert x+2\rvert-\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}\right\rvert=1$
$f(x,y):=\left\lvert\lvert x+2\rvert-\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}\right\rvert-1$	完成
$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}-\lvert x--2\rvert=1$	$\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}-\lvert x+2\rvert=1$
$\left(\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}\right)^2-(1+\lvert x+2\rvert)^2=0$	$-2\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-1=0$
$-2\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-1=0\mid x\ge -2$	$-10\cdot x+y^2-5=0$
$(-10\cdot x+y^2-5=0)+5+10\cdot x$	$y^2=10\cdot x+5$
$-2\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-1=0\mid x<-2$	$-6\cdot x+y^2+3=0$
$(-6\cdot x+y^2+3=0)+6\cdot x-3$	$y^2=6\cdot x-3$
$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}-\lvert x--2\rvert=-1$	$\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}-\lvert x+2\rvert=-1$
$\left(\sqrt{x^2-4\cdot x+y^2+4}\right)^2-(-1+\lvert x+2\rvert)^2=0$	$2\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-1=0$
$2\cdot\lvert x+2\rvert-8\cdot x+y^2-1=0\mid x\ge -2$	$-6\cdot x+y^2+3=0$
$(-6\cdot x+y^2+3=0)+6\cdot x-3$	$y^2=6\cdot x-3$

由以上演算过程，我们也可以看出结果是两条抛物线. 以上计算过程中，去绝对值时采用分类讨论，注意中间一种情况求出的结果不符条件.

问题 8 平面内到定点与定直线的**距离之积**为常数的动点轨迹是什么图形？

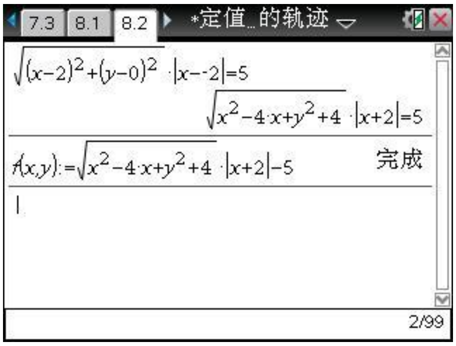
探索过程可参考问题 1、问题 2，探索结果见下图.

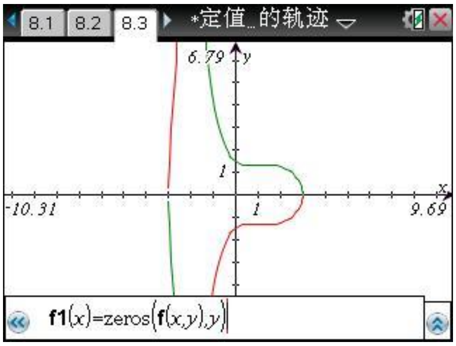


由几何跟踪的结果，我们发现以上平面内到到定点与定直线的距离之积为常数的动点轨迹是一个河蚌线和一个圆.

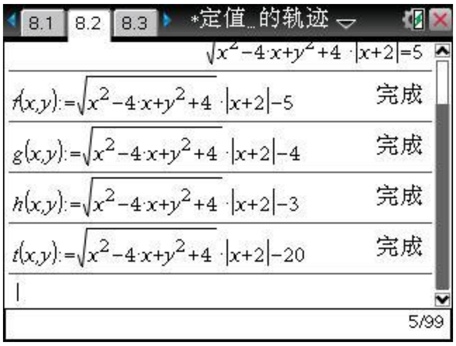
例 8 已知定点 $F(2,0)$ 和定直线 $l:x=-2$，求平面内到定点 F 和定直线 l 的距离之积为常数 5 的动点 M 的轨迹方程.

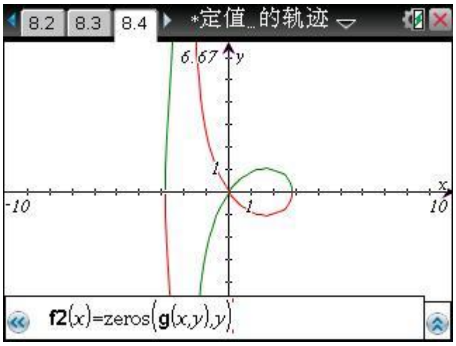
设动点 M 的坐标，写出条件等式，定义二元函数，再用零点表达式作出图形，如下：

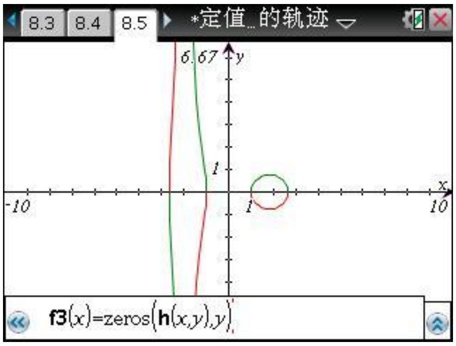


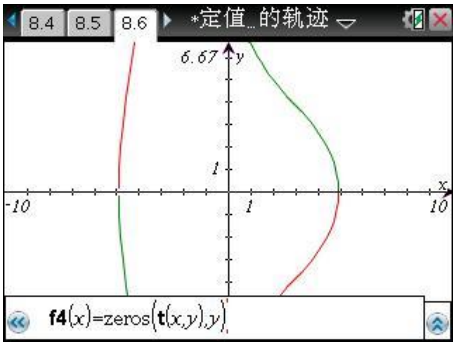


改变常数的值，探索得到不同形状的图形，但可以看出它们的一个连续变化的过程.



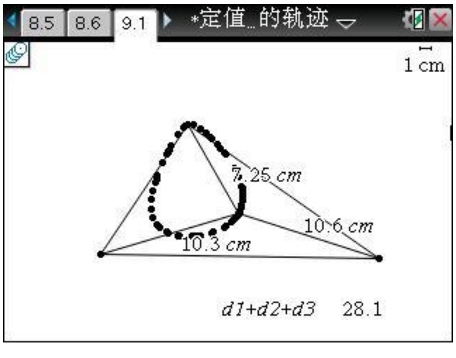


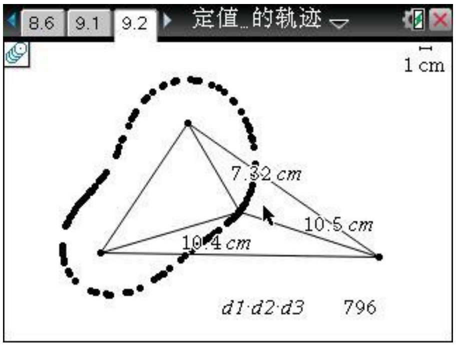


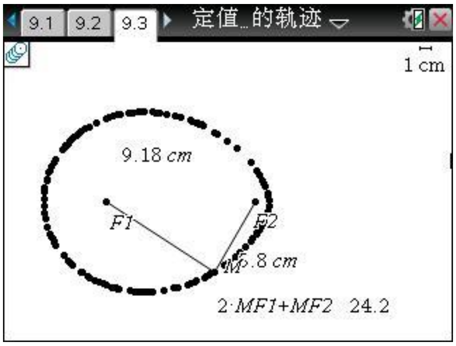


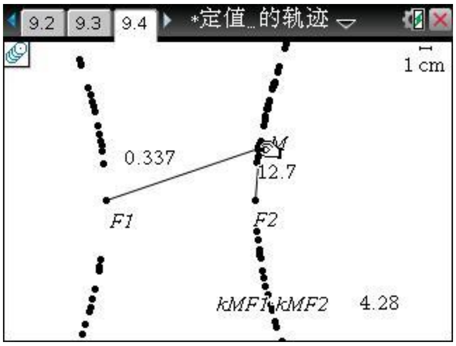
结尾篇　TI 技术应用与数学研究

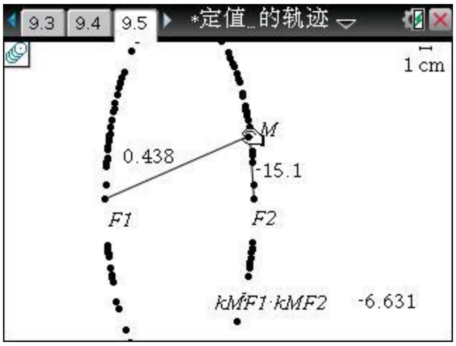
以上 TI 技术的运用，可以解决系列定值条件下的动点轨迹问题，再看如下几例：

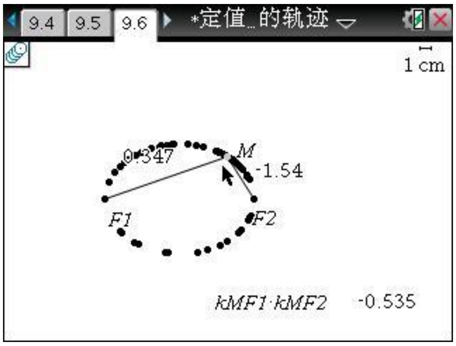






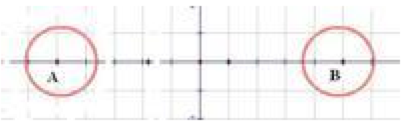




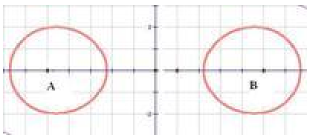


同时，我们也要意识到，我们探索的轨迹可能只是其中的一种情况，随着定值的改变，轨迹可能是另外一种特别的图形，例如：设两定点 A、B 间距离为 10，动点 M 满足 $|PA|*|PB|$=常数 d，那么 d 值的改变，各种动点轨迹如下图.

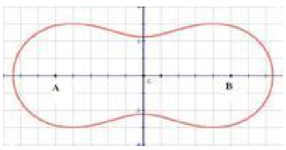
（1）d=12，俩圆？



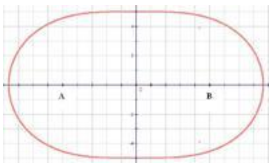
（2）d=20，俩鸡蛋？



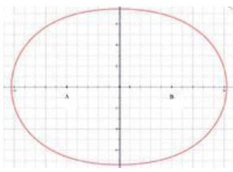
（3）d=30 ，花生？



4）d=50 ，跑道？



（5）d=80 ，椭圆？



再者，我们可以充分地通过数学代数运算，分析与研究一类轨迹问题，例如平面内到两定点的距离关系恒定的动点轨迹，经研究我们有下面的结论：

1、到两定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a$ $(2a>0)$

（1）当 $2a>|F_1F_2|$ 时，动点轨迹是椭圆；

（2）当 $2a=|F_1F_2|$ 时，动点轨迹是线段 F_1F_2；

（3）当 $2a<|F_1F_2|$ 时，动点轨迹不存在.

2、到两定点 F_1、F_2 的距离之差等于常数 $2a$ (2a>0)

（1）当 $2a<|F_1F_2|$ 时，动点轨迹是双曲线；

（2）当 $2a=|F_1F_2|$ 时，动点轨迹是以 F_1、F_2 为端点的两条射线；

（3）当 $2a>|F_1F_2|$ 时，动点轨迹不存在.

3、到两定点 F_1、F_2 的距离之比（商）等于常数 m (m>0)

（1）当 m=1 时，动点轨迹是线段 F_1F_2 的垂直平分线；

（2）当 $m\neq 1$ 时，动点轨迹是圆，这也可称之为圆的第二定义.

4、到两定点 F_1、F_2 的距离之积等于常数 m (m>0)

以 F_1F_2 所在直线为 x 轴，以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系.

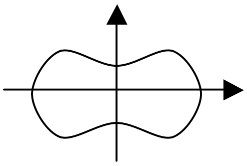
设 $|F_1F_2|=2c,(c>0)$，则 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，又设动点 M 的坐标为 (x,y).

$$\because |MF_1|\bullet|MF_2|=m,\qquad \therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-c)^2+y^2}=m.$$

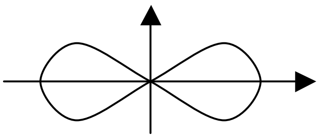
两边平方，化简得： $x^4+y^4+2x^2y^2-2c^2x^2+2c^2y^2+c^4-m^2=0$.

利用一些计算机作图软件，我们可以得到如下三种情况：

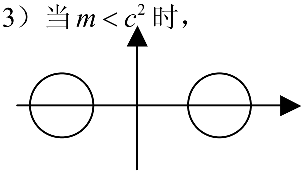
（1）当 $m>c^2$ 时



（2）当 $m=c^2$ 时



（3）当 $m<c^2$ 时，



结束语：

本文中 TI 图形计算器的运用，轻松帮助我们探索了系列定值条件下的动点轨迹问题，由图形绘制进一步验证与探索了不同条件下的结果，由 CAS 计算对轨迹方程进行了具体的运算求解与分析. 文中所展示的 TI 图形计算器的教育技术，仅仅涉及到三个方面，即几何图形、函数图像、CAS 计算，而 TI 图形计算器还有更多的功能，例如编程学习、电子表格、统计分析、金融计算、数据采集等等. 我们应当看到，TI 图形计算器这一先进工具的运用，在帮助我们解决数学问题的同时，巩固与丰富了我们的数学知识，也提升了我们探索和创新的意识与能力. 当今社会已经走进了信息技术的时代，我们应当掌握好先进科学技术与工具的使用，让它服务于我们的学习与研究.

参考文选：

[1] 普通高中课程标准实验教科书. 数学.选修 1-1（课） 人民教育出版社，2007

[2] 刘培杰. 第三篇 解析几何—新编高中数学解题方法全书（高中版），2006

（作者：高建彪 邮箱:dsgjb@163.com，QQ:76456245 2011 年 9 月 17 日完稿于中山市东升高中）